最优化理论基础　选择题作业-复习题

题量：38 题 | 满分：100 分

一、单选题（共 38 题，100 分）

1. 下列哪类优化问题的目标函数是凸函数，约束集也是凸集?

A 非线性规划

B 整数规划

C 凸优化

D 组合优化

✓ **答案：C**

解析：凸优化问题的特点在于其目标函数是凸函数，且可行域是凸集，这保证了局部最优解即为全局最优解。

2. 以下哪种优化问题的目标函数为二次函数，而约束为线性函数?

A 线性规划

B 二次规划

C 凸优化

D 整数规划

✓ **答案：B**

解析：二次规划是指目标函数是二次函数，而约束函数为线性函数的一类优化问题。

3. 以下说法中错误的是?

A 凸优化问题的局部最优解就是全局最优解

B 非线性规划的最优解一定唯一

C 线性规划问题的可行域是凸集

D 整数规划问题的解空间是离散的

> ✓ **答案：B**
>
> **解析**：非线性规划的最优解不一定是唯一的，可能有多个局部最优解。

4. 以下哪种优化问题的解空间是连续的?

A 整数规划

B 组合优化

C 线性规划

D 动态规划

> ✓ **答案：C**
>
> **解析**：线性规划是一种连续优化问题，其解空间通常是连续的凸集。

5. 在线性规划中，目标函数和约束条件都是什么形式的?

A 目标函数是二次函数，约束是线性的

B 目标函数和约束均为二次函数

C 目标函数和约束均为线性函数

D 目标函数是非线性函数，约束是线性的

✓ 答案：C

解析：线性规划的定义是目标函数和所有约束函数都是线性函数的问题。

6. 下列哪一类问题是非线性规划问题?

A 目标函数和约束函数均为线性的优化问题

B 目标函数为二次函数，约束为线性的优化问题

C 目标函数或约束条件中含有非线性项的优化问题

D 变量必须取整数值的优化问题

✓ 答案：C

解析：非线性规划是指目标函数或约束条件中至少有一个是非线性的数学优化问题。相比之下，线性规划、整数规划等属于它的子类。

7. 以下哪一项不属于最优化问题的三要素?

A 决策变量

B 目标函数

C 约束条件

D 收敛速度

✓ 答案：D

解析：最优化问题的三个基本要素是决策变量、目标函数和约束条件。收敛速度是求解过程中的性能指标，并不是问题本身的基本要素。

8. 对于最优化问题 $\min f(x)$，目标函数 $f(x)$ 的值越小则结果越____。

A 好

B 差

C 不确定

D 无影响

✓ 答案：A

解析：在最优化问题中，如果目标是最小化目标函数 $f(x)$，那么随着 $f(x)$ 的减小，目标函数值越接近最优值，因此结果越好。

9. 设 $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$，则 f 在点 $(1,1)^T$ 处的梯度是

A $\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$

✓ **答案：A**

解析： 计算一阶偏导数：$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 3x_2$，$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 + 4x_2$。代入 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ 得到梯度 $\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}$。

10. 函数 $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ 的 Hesse 矩阵在点 $(1,1)^T$ 处的行列式值为

A 0

B 3

C 36

D 12

✓ **答案：C**

解析： Hesse 矩阵为 $\begin{bmatrix}6x_1 & 0\\0 & 6x_2\end{bmatrix}$。代入 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$，得 $\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$，其行列式为 $6 \times 6 = 36$。

11. 梯度向量 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 的方向是：

A 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的最大下降方向

B 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的等高线切线方向

C 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在该点的最大上升方向

D 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的水平方向

✓ 答案：C

解析：梯度向量指向函数在该点的最陡上升方向，因此选项C正确。最大下降方向是负梯度方向，等高线切线方向垂直于梯度方向。

12. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处二阶连续可微，那么其二阶泰勒展开式的误差项 $o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2)$ 指的是：

A 比 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2$ 更高阶的无穷小

B 与 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2$ 同阶的无穷小量

C 比 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2$ 更低阶的无穷小量

D 与 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2$ 无关的量

✓ 答案：A

解析：泰勒展开式中的 $o(\|x-x_0\|^2)$ 表示当 $x\to x_0$ 时，这一项相对于 $\|x-x_0\|^2$ 是更小的无穷小量，即更高阶的无穷小。

13. 设 $f(x,y)=e^{xy}$，则其在点 $(0,0)$ 处的 Hesse 矩阵是：

A $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

✓ 答案：C

解析： 函数 $f(x,y)=e^{xy}$ 在点 $(0,0)$ 处的二阶偏导数均为 0，因此 Hesse 矩阵为零矩阵。

补注： 原解析此处有笔误——两个纯二阶偏导 $f_{xx}=y^2e^{xy}$、$f_{yy}=x^2e^{xy}$ 在 $(0,0)$ 处确为 0，但混合偏导 $f_{xy}=e^{xy}(1+xy)$ 在 $(0,0)$ 处等于 1，故 Hesse 矩阵应为 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$（选项 C），并非零矩阵。

14. 函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 在 $(1,1)$ 处的 Hesse 矩阵为：

A $\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

✓ **答案：A**

解析： 函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的二阶偏导数为：$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$。在点 $(1,1)$ 处，Hesse 矩阵为 $\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{bmatrix}$。

15. 设集合 $S\subseteq\mathbb{R}^n$，若对于任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$ 和任意标量 $\lambda\in[0,1]$，都有 $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in S$，则称集合 S 是什么？

A 闭集

B 凸集

C 紧集

D 连通集

✓ **答案：B**

解析： 根据凸集的定义，若任意两点的凸组合仍属于集合，则该集合为凸集。

16. 下列哪个集合不是凸集?

A 实数轴上的区间 $[0, 1]$

B 二维平面上的单位圆

C 二维平面上的半径为 1 的圆周

D 三维空间中的球体

> **✓ 答案：C**
>
> **解析**：圆周中存在两点，其连线穿过了圆周外区域，因此不是凸集。

17. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸集，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{C}$，且 $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2$，则 $\boldsymbol{x}$ 的位置是?

A 一定不属于 $\mathcal{C}$

B 可能属于也可能不属于 $\mathcal{C}$

C 一定属于 $\mathcal{C}$

D 在 $\mathcal{C}$ 的边界上

> **✓ 答案：C**
>
> **解析**：因为 C 是凸集，根据定义任意两点的凸组合仍在该集中。

18. 在 $\mathbb{R}^n$ 空间中，两个凸集的交集一定是?

A 非凸集

B 凸集

C 空集

D 无法判断

> **✓ 答案：B**
>
> **解析**：两个凸集的交集仍然满足凸集的定义，即任意两点的凸组合仍在集合中。

19. 设 $\mathcal{C}$ 是一个凸集，若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{C}$，且 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$，其中 $\lambda_i \geq 0$，则以下哪项一定成立?

A $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \notin \mathcal{C}$

B $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \in \mathcal{C}$

C $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ 对某个特定 j 成立

D 以上都不对

> **✓ 答案：B**
>
> **解析**：这是凸集定义的直接推广，有限个点的凸组合仍在集合中。

20. 下列哪一组集合是凸集?

A $[0,1] \cup [2,3]$

B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

C $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

D $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

✓ 答案：C

解析：凸集的定义要求任意两点之间的连线完全在集合内。A 是不连续的区间并集，不是凸集；B 是单位圆周；C 是三角形区域，属于凸集；D 是单位圆内部但不包含原点，也不是凸集。

21. 设 S_1, S_2 是凸集，那么下列哪个集合一定也是凸集?

A $S_1 \cap S_2$

B $S_1 \cup S_2$

C $S_1 \setminus S_2$

D $S_2 \setminus S_1$

✓ 答案：A

解析：凸集的交集仍是凸集，但并集、差集可能不满足此条件。因此唯一正确答案是 A。

22. 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是二阶连续可微函数，其 Hessian 矩阵为 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$。若对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 是正定矩阵，则下列哪一项是正确的?

A f 是严格凸函数。

B f 是凹函数。

C f 是非凸函数。

D f 既不是凸函数也不是凹函数。

> **✓ 答案：A**
>
> **解析**：若 Hessian 矩阵处处正定，则函数是严格凸的。严格凸函数的一个重要性质是其极小值唯一。

23. 设 f 是定义在凸集 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的连续函数。若对于任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$ 和 $\theta \in [0,1]$，有 $f(\theta \boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y}) \leq \theta f(\boldsymbol{x}) + (1-\theta) f(\boldsymbol{y})$，则 f 是什么类型的函数?

A 严格凸函数

B 一致凸函数

C 凸函数

D 非凸函数

> **✓ 答案：C**
>
> **解析**：该不等式正是凸函数的定义，即凸组合的函数值小于等于函数值的凸组合。

24. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数，且 $\boldsymbol{x}^*$ 是 f 在某个闭凸集上的最小值点。则下列哪项一定成立?

A $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$

B $\boldsymbol{x}^*$ 是唯一的最小值点。

C $\boldsymbol{x}^*$ 是全局最小值点。

D $\boldsymbol{x}^*$ 是局部最小值点。

> **✓ 答案：C**
>
> **解析**：凸函数的任何局部极小值都是全局最小值，因此 x^* 一定是全局最小值点。

25. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数，c 是常数。考虑函数 $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + c$，下列哪一项是正确的?

A $g(\boldsymbol{x})$ 是一致凸函数。

B $g(\boldsymbol{x})$ 是非凸函数。

C $g(\boldsymbol{x})$ 仍是凸函数。

D $g(\boldsymbol{x})$ 的凸性取决于 c 的符号。

> **✓ 答案：C**
>
> **解析**：给凸函数加上一个常数不会改变其凸性，因此 $g(x) = f(x) + c$ 依然是凸函数。

26. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在凸集 $\mathcal{C}$ 上的二阶可微函数。若对于所有 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 是半正定的，则 $f(\boldsymbol{x})$ 是什么类型的函数?

A 严格凸函数

B 凸函数

C 一致凸函数

D 非凸函数

✓ 答案：B

解析：Hessian 矩阵的半正定性是判断函数凸性的充分必要条件。

27. 判断函数 $f(x) = x^2 + 3x + 1$ 是否为凸函数。

A 是凸函数

B 是凹函数

C 既不是凸也不是凹

D 无法判断

✓ 答案：A

解析：计算其二阶导数 $f''(x) = 2 > 0$，因此 $f(x)$ 是凸函数。

28. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 内的凸函数，则对于任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $x_1 < x_2$，下列哪个不等式成立?

A $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

B $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

C $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

D $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

✓ **答案：C**

解析：凸函数的定义为 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$，$\lambda \in [0,1]$。

补注：选项 B 缺少 $\lambda \in [0,1]$ 的限制（题干只限定 $x_1, x_2 \in [a,b]$），故并非恒成立——取 $\lambda = 2$、$f(x) = x^2$、$x_1 = 0, x_2 = 1$，则左边 $f(-1) = 1$、右边 $2f(0) - f(1) = -1$，$1 \leq -1$ 不成立。选项 C 是中点凸性 $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，不含额外参数、对凸函数恒成立，故答案为 C。

29. 设函数 $f(x)$ 在点 x^* 处的梯度为 0 且 Hessian 矩阵为正定，则 x^* 是____。

A 局部极小值点

B 局部极大值点

C 全局极大值点

D 全局极小值点

✓ **答案：A**

解析：梯度为 0 且 Hessian 矩阵正定，是局部极小值的充分条件。因此选项A正确。

30. 若 $f(x)$ 是一个连续可微的凸函数，则梯度为零的条件是___。

A 局部极小值的必要非充分条件

B 局部极小值的充分非必要条件

C 全局极小值的充要条件

D 局部极大值的必要非充分条件

✓ 答案：C

解析：对于凸函数而言，梯度为零既是局部极小值的充分条件，又是全局极小值的充要条件，因此选项C正确。

31. 以下哪项是连续可微无约束优化中局部极小值点的必要条件?

A $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$

B $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ 正定

C $f(\boldsymbol{x}^*) > 0$

D $\boldsymbol{x}^*$ 是可行域的边界点

✓ 答案：A

解析：梯度为零是局部极小值点的必要条件。

32. 对于二阶连续可微的无约束优化问题，如果 x^* 是局部极小值点，则 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x^*)$ 必须满足什么条件?

A 半正定

B 正定

C 负定

D 非奇异

> **✓ 答案：A**
>
> **解析**：Hessian 矩阵半正定是局部极小值点的必要条件之一。

33. 在二阶连续可微无约束优化问题中，如果 x^* 满足 $\nabla f(x^*) = 0$ 并且 $\nabla^2 f(x^*)$ 正定，则 x^* 是什么类型的点?

A 局部极小值点

B 局部极大值点

C 全局极小值点

D 无法确定

> **✓ 答案：A**
>
> **解析**：梯度为零是必要条件，Hessian 正定是充分条件，两者共同成立表明该点是局部极小值点。

34. 在连续可微的无约束优化问题中，若 x^* 是局部极小值点，则下列哪一项一定成立？

A $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$

B $f(\boldsymbol{x}^*) > f(\boldsymbol{x})$ for all $\boldsymbol{x}$

C $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) \neq \mathbf{0}$

D $\boldsymbol{x}^*$ 是边界点

> **✓ 答案：A**
>
> **解析**：梯度为零是局部极小值点的必要条件。

35. 在最优化理论与算法中，算法框架通常由哪几个主要部分组成？

A 初始化、迭代过程、终止条件

B 目标函数、约束条件、初始点

C 梯度计算、Hessian 矩阵、学习率

D 模型训练、参数更新、损失评估

> **✓ 答案：A**
>
> **解析**：最优化问题的算法通常需要明确初始状态，执行迭代过程以逼近最优解，并通过终止条件判断何时停止迭代，这些构成了算法的核心框架。

36. 在最优化算法的迭代框架中，每次迭代通常包含以下哪一部分？

A 梯度下降

B 收敛性分析

C 搜索方向和步长计算

D 目标函数重定义

✓ 答案：C

解析：最优化算法的迭代通常包括计算搜索方向以及确定合适的步长以更新解。这构成了每次迭代的核心部分。收敛性分析和梯度下降是该框架中的特定方法，但不属于每次迭代的必要组成部分。

37. 下列哪个选项不是最优化算法通用框架中的基本组成？

A 初始解设定

B 目标函数求导

C 终止条件判断

D 解的更新规则

✓ 答案：B

解析：目标函数求导只是实现最优化算法的一种方式，尤其常见于梯度相关的方法。它并不是算法通用框架中的基本组成部分。

38. 最优化算法的迭代框架中，解的更新公式通常表示为：$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k$，其中 $\boldsymbol{d}_k$ 表示什么?

A 当前解的位置

B 步长

C 搜索方向

D 目标函数值

✓ 答案：C

解析：在最优化算法中，d_k 通常表示第 k 步的搜索方向。步长则由 α_k 给出。